# [1157] 前談話ニ續イテ

東屋　五郎(名大)

此ノ前ノ談話1156ニ於テ、浅野、中山先生ノ論文「*A Remark on the Arithmetik in a subfield*」ノ結果ガ *rein-inseparabel* ナ拡大体ノ場合ニモ同様ニ成立スルコトニツイテ述ベマシタガ、更ニ上記論文ノ *a second proof* ノ方法ヲ少シ変ヘマスト何処. *Theorem* 2ニ相當スル定理ガ次ノ如ク、一般ニ無限次代數的拡大体ノ場合ニモ成立ツコトガ分リマシタノデ、次ニ述ベテミマス。

従ッテ、前談話ノ結果モ特別ノ場合トシテ含マレルワケデアリマス。

定理.[*] $k$ ガ整閉整域 $\mathfrak{o}$ ノ商体, $K$ ガ $k$ ノ代數的擴大体デ、$K$ ノ $\mathfrak{o}$ ニ對スル *Hauptordnung* ヲ $\mathfrak{O}$ トスルトキ、若シ $\mathfrak{O}$ ニ於テ *gewöhnliche Arithmetik* ガ成立ツナラバ、$\mathfrak{o}$ ニ於テモソレガ成立ツ。

(証明)　$\mathfrak{O}$ ニ於テ *gewöhnliche Arithmetik* ガ成立ッタメノ必要且ッ十分ナル條件ハ上記論文ノ *a second proof* ニアリマスヤウニ、次ノ條件ヲ満足スル $K$ ノ *Primdivisor* $\mathfrak{P}$ ノ集合 $\{\mathfrak{P}\}$ ガ存在スルコトデアリマス;

1)　$\mathfrak{O} = \bigcap_{\mathfrak{P}} \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$, 但シ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ ハ $\mathfrak{P}$ ノ賦値環ヲ表ハス。

*) 逆ハ無限次拡大体ノ場合ニ必ズシモ成立タナイ.

2) $\mathfrak{P}$ ハスベテ *diskret*.

3)* $a \neq 0$ ヲKノ任意ノ元トスレバ、有限個ノ値以外デハ $W_{\mathfrak{P}}(a)=0$ デアル。

但シ、$W_{\mathfrak{P}}$ ハ $\mathfrak{P}$ ニヨリ定義サレル指數賦値（ノーツ）ヲ表ハス。

4) 有限個ノ（$\{\mathfrak{P}\}$ ニ屬スル）*Primdivisor* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{P}_m$ 及ビソレニ對應シテKノ元 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_m$ が與ヘラレタトキ、任意ノ實數Mニ對シ

$$W_{\mathfrak{P}_i}(a-a_i) \geqq M \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, m).$$

$$W_{\mathfrak{P}}(a) \geqq 0 \quad (\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}_i)$$

ナルKノ元aが存在スル。

シカシ、コノ條件4)ハ次ノ $a_1 = 1$, $a_2 = \cdots\cdots = a_m = 0$ ナル特別ノ場合ノ條件4')デ置換ヘテヨイコトハ容易ニ分ル:

4') 有限個ノ *Primdivisor* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{P}_m$ が與ヘラレタトキ、任意ノ實數Mニ對シ

$$W_{\mathfrak{P}_1}(a-1) \geqq M, \quad W_{\mathfrak{P}_i}(a) \geqq M \ (i \neq 1),$$

$$W_{\mathfrak{P}}(a) \geqq 0 \quad (\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}_i)$$

ナルKノ元aが存在スル。

---

*) *a second proof* ニ於テ コノ條件が落サレテキマスが。

而シテ、ソノ場合即チ上記ノ條件 1), 2), 3), 4) (又ハ 4')) ガ満足サレル場合、ソノ賦値環ガ $\mathfrak{O}$ ヲ含ムヤウナ Primdivisor 全体ガ丁度 $\{\mathfrak{P}\}$ トナリマス。

サテ、$\{\mathfrak{P}\}$ ノ Primdivisor $\mathfrak{P}$ ハ $k$ ニ於テ (trivial デナイ) Primdivisor $\mathfrak{p}$ ヲ引起シマスガ、カヽル $\mathfrak{p}$ 全体ノ集合 $\{\mathfrak{p}\}$ ト $\mathfrak{o}$ ノ間ニ於テモ上記ノ條件 1), 2), 3), 4') ガ満足サレルコトヲ証明スレバヨイ。

$\mathfrak{O}$ ハ整閉ナル故、$\mathfrak{o} = \mathfrak{O} \cap k = \bigcap_{\mathfrak{P}} \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}} \cap k = \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ ハリデアル。又 2), 3) ガ成立ツコトハ明カデアル。

今、$\{\mathfrak{p}\}$ ヨリ任意ノ一ツノ $\mathfrak{p}$ ヲトル。$\mathfrak{O}$ ハ $\mathfrak{o}$ ニ對スル Hauptordnung、即チ $\mathfrak{o}$ ニ對シ ganz-abhängig ナモノ全体ノナス環デアルカラ、$\mathfrak{p}$ ノ擴張ナル K ノ Primdivisor ノ賦値環ハ $\mathfrak{O}$ ヲ含ム故 $\{\mathfrak{P}\}$ ニ属スルコトガ分ル。(即チ $\{\mathfrak{P}\}$ ハ $\{\mathfrak{p}\}$ ノ擴張ナル Primdivisor 全体トナッテヰル)

又 $\{\mathfrak{P}\}$ ニ關スル條件 3) ニヨッテ $\mathfrak{p}$ ノ擴張ナル $\mathfrak{P}$ ハ有限箇シカナイ。

サテ、$k$ ノ $\mathfrak{p}$-進体ヲ $k_{\mathfrak{p}}$、ソノ代数的閉拡大体ヲ $\Omega$ トスレバ $k_{\mathfrak{p}}$ ノ賦値 $w_{\mathfrak{p}}$ ハ $\Omega$ ニ一意的ニ拡張可能ダカラ、ソノ拡張サレタ $\Omega$ ノ賦値ヲモ $w_{\mathfrak{p}}$ ニテ表ハスコトニスル。

シカラバ、$\mathfrak{p}$ ノ擴張ナル K ノ Primdivisor $\mathfrak{P}$ ハ、$K/k$ ノ $\Omega/k$ ノ中ヘノ同型置換 $\sigma$ ニヨリ $K \ni a \to w_{\mathfrak{p}}(a^{\sigma})$

ナル賦値ニ對應スルモノデアル

従ッテ、今Kノ元$a$及ビ$M \geqq 0$ガアッテ、スベテノ$\mathfrak{p}$ノ擴張ナル$\mathfrak{P}$ニ對シ

$$W_{\mathfrak{P}}(a-1) \geqq M \quad (\text{又ハ } W_{\mathfrak{P}}(a) \geqq M$$

ガ成立ツトスレバ、スベテノ$K/k$ノ$\Omega/k$ノ中ヘノ同型置換$\sigma$ニ對シ

$$W_{\mathfrak{p}}(a^{\sigma}-1) \geqq M \quad (\text{又ハ } W_{\mathfrak{p}}(a^{\sigma}) \geqq M)$$

ガ成立ツワケデアル。

$a$ハ$k$ニ對シ代數的ナル故、$a$ノ$k$ニ於テ滿足スル既約多項式ヲ

$$x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

トオケバ、$a$ノ「ノルム」$Na = (-1)^n \alpha_0$ハ$a^{\sigma}$ノ形ノ元ノ有限個ノ積ナル故

$$W_{\mathfrak{p}}(Na-1) \geqq M \quad (\text{又ハ } W_{\mathfrak{p}}(Na) \geqq M)$$

ガ成立ツ。

ソコデ4')ヲ証明スルタメ、有限個ノ$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots\cdots,$ $\mathfrak{p}_m$及ビ$M \geqq 0$ガ與ヘラレタトスル。シカラバ$\{\mathfrak{P}\}$ニ關スル條件4)ニヨリ、$\mathfrak{p}_1$ノ擴張ナル$\mathfrak{P}$ニ對シテハ、$W_{\mathfrak{P}}(a-1) \geqq M$, $\mathfrak{p}_i$ $(i \neq 1)$ノ擴張ナル$\mathfrak{P}$ニ對シテハ$W_{\mathfrak{P}}(a) \geqq M$, 他ノ$\mathfrak{p}(\neq \mathfrak{p}_i)$ノ擴張ナル$\mathfrak{P}$ニ對シテハ$W_{\mathfrak{P}}(a) \geqq 0$ヲ滿足スルKノ元$a$ガ存在スルカラ

$$W_{\mathfrak{p}_1}(Na-1) \geqq M, \quad W_{\mathfrak{p}_i}(Na) \geqq M \; (i \neq 1),$$
$$W_{\mathfrak{p}}(Na) \geqq 0 \; (\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i)$$

ガ成立スル。即チ$Na \in k$ガ條件4')ニ適スル元デアル。

（注意）　上デ條件4)ガ4′)デ置換ヘラレルコトヲ云ヒマシタガ、更ニソレハソノ特別ナ場合ノ次ノ條件ト同値デアリマス：

4′)　任意ニ有限個ノ Primdivisor $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{P}_m$ ガ與ヘラレタトキ

$$w_{\mathfrak{P}_1}(a-1)>0, \quad w_{\mathfrak{P}_i}(a)>0 \quad (i \neq 1),$$
$$w_{\mathfrak{P}}(a) \geqq 0 \quad (\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}_i)$$

ナルKノ元$a$ガ存在スル。

証明ハ A. Ostrowski, Untersuchungen zur arithmetische Theorie der Körper I. §20, S.310 (Math. Zeitsch 39) ニアル通リデ、簡單デスカラ略シマス。

---